

A. $\sqrt{3}x - y - z - 3 = 0$

B. $\sqrt{3}x - y + z - 6 = 0$

C. $\sqrt{3}x - y - z + 1 = 0$

D. $\sqrt{3}x - y - 2z + 3 = 0$

4. 把五个标号为 1 到 5 的小球全部放入标号为 1 到 4 的四个盒子中，并且不许有空盒，那么任意一个小球都不能放入标有相同标号的盒子中的概率是 ()。

A. $\frac{3}{20}$

B. $\frac{3}{16}$

C. $\frac{7}{20}$

D. $\frac{2}{5}$

5. 已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，则矩阵 A 的特征值为 ()。

A. -1

B. 4

C. -1, 4

D. -1, 3

6. 下列级数中，收敛的是 ()。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

7. 《义务阶段新课标（2011 版）》的数学课程目标分为总目标和阶段目标。下列不属于总目标中问题解决的是 ()。

A. 初步形成评价与反思的意识

B. 获得分析问题、解决问题的一些基本方法，体验解决问题方法的多样性，发展创新意识

C. 初步学会从数学的角度发现问题和提出问题，综合运用数学知识解决简单

的实际问题，增强应用意识，提高实践能力

D. 学会独立思考，体会数学的基本思想和思维方式

8. 将圆周率精确到小数点后第七位的是（ ）。

A. 祖冲之

B. 秦九韶

C. 孙思邈

D. 杨辉

二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9. 求椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 在矩阵 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下所得的曲线

方程。

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上可导， $f(0) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ，证明：

(1) 存在 $a > 0$ ，使得 $f(a) = 1$ ；

(2) 对 (1) 中的 a ，存在 $\xi \in (0, a)$ ，使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$ 。

11. 求 xOy 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 分别绕 x 轴、 y 轴旋转而形成的旋转曲面方程。

12. 《义务教育课程数学课程标准（2011年版）》中强调培养学生“空间观念”。简要回答“空间观念”表现为哪些方面，并举例说明。

13. 在学生的学习活动中，教师的“组织”作用主要体现在哪些方面？

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 设 $a > 0$ ，证明函数 $f(x) = x^3 + ax + b$ 存在唯一的零点。

四、论述题（本大题 1 小题，15 分）

15. 对学生数学学习的评价，既要关注学习结果，也要关注学习过程，你认为对学生数学学习过程的评价应关注哪些方面？试举例说明。

五、案例分析（本大题 1 小题，20 分）

16. 下面是某位高一数学教师教学偶函数时的教学片段，请仔细阅读，然后回答问题。

老师：同学们，前面我们学习了函数的基本性质—函数的单调性，今天我们继续学习函数的基本性质：

（边口述，边板书课题）函数的奇偶性

什么是偶函数呢？

（投影，老师同时口述）

定义：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，

那么函数 $f(x)$ 就叫偶函数。

老师：请同学们齐声朗读一遍

学生：（大家一起朗读）略

老师：好！从这个定义看，偶函数有什么性质呢？请同学们 4-5 人一组，进行探索、讨论和交流，然后我们来交流探索结果。

（学生纷纷结成 4-5 人一组，开展小组学习，大约经历了 8 分钟，期间教师参与了部分小组的讨论和指导）

老师：现在我们请各个小组汇报探索结果

问题：

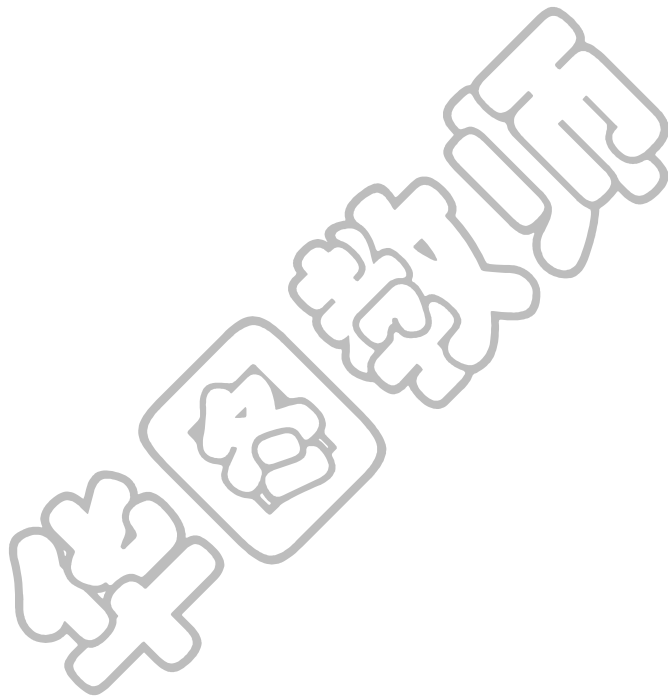
（1）该教师通过直接呈现偶函数定义的方式让学生获得概念，对此你有什么看法？并说明理由。（10 分）

（2）请对该教师的课堂提问做出评析。（10 分）

六、教案设计（本大题 1 小题，30 分）

17. 《义务教育数学课程标准（2011 年版）》关于平行四边形的性质的教学要求是：探索并证明平行四边形的性质定理—平行四边形的对边以及对角相等。请基于该要求，完成下列教学设计任务：

- （1）设计平行四边形性质的教学目标；（6 分）
- （2）设计两种让学生发现平行四边形性质的教学流程；（12 分）
- （3）设计平行四边形性质证明的教学流程，使学生领悟证明过程中的数学思想方法。（12 分）



2018 年下半年教师资格考试全真模拟

《数学学科知识与教学能力》答案解析

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. B【图图解析】用定义可求得左导数存在，右导数不存在。

2. D【图图解析】根据收敛数列与子数列间的关系可知 A、B、C 均正确，对 D

选项，可取 $a_{3n} = a + \frac{1}{3n}$ ， $a_{3n+1} = a + \frac{1}{3n+1}$ ， $a_{3n+2} = 2a + \frac{1}{3n+2}$ ，知

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{3n+1} = a$ ， $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{3n+2} = 2a$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq a$ ，因此 D 选项

不正确。

3. A【图图解析】先求由曲线 $\begin{cases} 3x^2 - 2y^3 = 10 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转

曲面方程：

$$3(\sqrt{x^2 + z^2})^2 - 2y^3 = 10, \quad \text{即} \quad 3x^2 - 2y^3 + 3z^2 = 10, \quad \text{令}$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 - 2y^3 + 3z^2 - 10$$

$$F_x \Big|_{(\sqrt{3}, 1, -1)} = 6x \Big|_{(\sqrt{3}, 1, -1)} = 6\sqrt{3}, \quad F_y \Big|_{(\sqrt{3}, 1, -1)} = -6y^2 \Big|_{(\sqrt{3}, 1, -1)} = -6$$

$$F_z \Big|_{(\sqrt{3}, 1, -1)} = 6z \Big|_{(\sqrt{3}, 1, -1)} = -6$$

在点 $(\sqrt{3}, 1, -1)$ 处的切平面的法向量可取为 $\vec{n} = \{\sqrt{3}, 1, -1\}$ 所以，在点

$(\sqrt{3}, 1, -1)$ 处的切平面的方程为 $\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) - (y - 1) - (z + 1) = 0$ ，即

$$\sqrt{3}x - y - z - 3 = 0。$$

4. C【图图解析】第一类，第 5 球独占一盒，则有 4 种选择；如第 5 球独占第一盒，则剩下的三盒，先把第 1 球放旁边，就是 2, 3, 4 球放入 2, 3, 4 盒的错位排列，有 2 种选择，再把第 1 球分别放入 2, 3, 4 盒，有 3 种可能选择，于是此时有 $2 \times 3 = 6$ 种选择；如第 1 球独占一盒，有 3 种选择，剩下的 2, 3, 4 球放入两盒有 2 种选择，此时有 $2 \times 3 = 6$ 种选择，得到第 5 球独

占一盒的选择有 $4 \times (6 + 6) = 48$ 种，第二类，第 5 球不独占一盒，先放 1-4 号球，4 个球的全不对应排列数是 9；第二步放 5 号球：有 4 种选择； $9 \times 4 = 36$ ，根据分类计数原理得，不同的方法有 $36 + 48 = 84$ 种。而将五球放到 4 盒共有 $C_5^2 \times A_4^4 = 240$ 种不同的办法，故任意一个小球都不能放入

标有相同标号的盒子中的概率 $P = \frac{84}{240} = \frac{7}{20}$ ，故选 C。

4. C 【图图解析】 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，则由 $AA^{-1} = E$ 得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{即有} \begin{cases} -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = 1 \\ \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ -\frac{1}{4}c + \frac{1}{2}d = 0 \\ \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}d = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases}, \text{即} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{则矩阵 } A \text{ 的特征多项}$$

$$\text{式为 } f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4, \quad \text{令}$$

$f(\lambda) = 0$ ，则 $\lambda = -1$ 或 4 。

故矩阵 A 的特征值为 $-1, 4$ ，故选 C。

6. B 【图图解析】 利用 P 级数来判定。

7. D 【图图解析】 选项 D 是总目标中数学思考的，问题解决还包括学会与他人合作交流。

8. A 【图图解析】 祖冲之将圆周率精确到小数点后第七位；秦九韶结合当时实际需要写出《数书九章》；杨辉三角是二项式系数在三角形中的一种几何排列，故选 A。

二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9. 【答案要点】

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

设椭圆 C 上的点 (x_1, y_1) 在矩阵 A 对应的变换作用下得到点 (x, y) ，则

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{2}y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases} x_1 = 3x \\ y_1 = 2y \end{cases}$ 代入椭圆方程 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，得到 $x^2 + y^2 = 1$ ，所以所求曲线

的方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 。

10. 【答案要点】

(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ，对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ，存在 $A > 0$ ，使得当 $x \geq A$ 时，
 $|f(x) - 2| < \frac{1}{2}$ ，因此 $f(A) > \frac{3}{2}$ ，由连续函数的介值性，存在 $a \in (0, A)$ ，
 使得 $f(a) = 1$ 。

(2) 由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (0, a)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{1}{a}$ 。

11. 【答案要点】

在方程 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 中保持 x 不变，将 y 换作 $\sqrt{y^2 + z^2}$ ，就得到曲线绕 x 轴

旋转而成的旋转曲面方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2 + z^2}{9} = 1$ ，这个曲面我们称为双叶旋转

双曲面。

在 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 中保持 y 不变，将 x 换作 $\sqrt{x^2 + z^2}$ ，就得到曲线绕 y 轴旋转

而成的旋转曲面方程为 $\frac{x^2+z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ ，这个曲面我们称为单叶旋转双曲

面。

12. 【答案要点】

空间观念主要是指根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；想象出物体的方位和相互之间的位置关系；描述图形的运动和变化；依据语言的描述画出图形等。比如，根据一奖杯（或者多面体）的三视图，画出它的直观图，并依据相对应的数据信息求解出这个奖杯（或者多面体）的体积，即所占空间大小。再如，观察自己的教室或文具，说出所观察到的点、线、面之间的位置关系，并能说明理由。

13. 【答案要点】

主要体现在以下几个方面：1、教师应当准确把握教学内容的数学本质和学生的实际情况，确定合理的教学目标，设计一个好的教学方案。2、在教学活动中，教师要选择适当的教学方式，因势利导、适时调控、努力营造师生互动、生动活泼的课堂氛围，形成有效的学习活动。

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 【答案要点】

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ，所以存在 x_1, x_2 使得 $f(x_1) < 0$ ， $f(x_2) > 0$ 。则由 $f(x)$ 连续可知， $f(x)$ 在 x_1, x_2 之间至少存在一个零点。又因为 $f'(x) = 3x^2 + a > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 存在唯一的零点。

四、论述题（本大题 1 小题，15 分）

15. 【答案要点】

数学学习过程评价应关注以下几个方面：

（1）关注学生在学习数学的过程中肯于思考、善于思考、坚持思考，并不断改进思考的方法与过程。在指数概念扩充过程和两个重要基本初等函数的学习过程，能否常问为什么，从哪里来，到哪里去，根据是什么。对课本中的“问题提出”所指出的问题能否积极思考，主动回答。

（2）关注学生是否积极参与教学学习活动。如在“阅读材料”、“分析理解”、“抽象概括”等教学活动中，是否自觉地、主动地动手、动脑，并在这个过程中有所收获；在讨论中，能否与同伴交流对数学学习的体会，与他人合作交流探索数学问题。

（3）教材中的重难点知识，如“底数 a 对指数函数与对数函数的函数值变化的影响”，“不同类型函数增长的比较”等学习过程中，是否勇于克服困

难,体现了学好数学的自信心以及克服困难的毅力等良好的意志品质,也是数学学习过程评价的重要内容。

(4)学习过程中,不同的学生理解水平不同,允许他们间存在差异。只要他们努力了,在自己原水平上提高就行。不过应关注并帮助学生不断反思自己的数学学习过程,并改进数学学习方法。

总之,老师要注重对学生学习过程的评价,关注学生在学习过程中的点滴进步和变化,及时给予学生评价和反馈。

五、案例分析(本大题1小题,20分)

16.【答案要点】

(1)该教师的这种直接呈现偶函数定义的方法对抽象思维能力较高的学生较容易接受,使之能够直接进入学习状态并对本节的学习内容有一个总的概念与基本的轮廓,但对于其他抽象思维能力较差的学生学习有一定的困难。而且不符合新的教学理念,学生并没有参与到偶函数概念的形成这个活动中来,体现其主体地位,教师也没有起到一个引导者的作用——创设出学习偶函数概念的学习环境。

对于偶函数的定义的讲授建议由具体的函数图象引人,通过观察图象的特点,学生自行归纳总结出偶函数的定义。学生由具体到抽象、表象到概念的学习过程中,其观察能力、抽象概括能力也得到相应的提高。

(2)该教师的课堂提问违背了课堂提问的基本原则:目的性原则与启发性原则。课堂提问应有效的引导学生积极思考,启迪学生思维,而该老师的提问太过盲目没有针对性无法达到应有的课堂效果。适度性原则与循序渐进原则。课堂提问的涉及要考虑学生的认知水平,遵循由浅入深、由易到难的规律、使学生能够拾级而上,从而深刻地理解偶函数的概念,而该老师的提问不符合现阶段学生的认知水平,难度过大。无法达到学习的预期效果,学生能力也无法得到相应的提高。

六、教案设计(本大题1小题,30分)

17.【答案要点】

(1)平行四边形性质的三维教学目标如下:

知识与技能目标:知道平行四边形的概念,探索并证明平行四边形边、角的性质定理,发展分析推理思维能力。

过程与方法目标:经历对平行四边形性质的探索过程,明确性质的条件和结论,并能运用性质解决问题。

情感态度与价值观目标:在合作探究中体会解决问题的快乐,提高实践能力和合作交流能力。

(2)发现探究平行四边形性质的流程

<流程一>:

首先,引导学生以四人为一个学习小组,自主根据平行四边形的定义任意绘制平行四边形并观察。

其次,通过多媒体以问题串的形式呈现出以下问题,“除了两组对边分别相等,它的边之间还有什么关系?它的角之间有什么关系?量一量,检验一下与你的猜想一致吗?”让学生组内讨论分析。

最后，在学生探究并讨论结束后，请一两个小组代表汇报本组的发现，教师适时予以引导，得出猜想：平行四边形对边、对角相等。

<流程二>：

首先：通过多媒体呈现问题“小明同学用量角器量出平行四边形的一个内角是 77° ，就说知道了其余三个内角的度数；用直尺量出了一组邻边的长分别 40cm 和 45cm，就说知道了这个平行四边形的周长。你知道小明同学是怎么计算的吗？”，引导学生以学习小组的形式进行讨论。

其次，讨论结束后，请几个小组代表汇报本组的观点，教师将观点进行总结归纳，与学生一起得出猜想：平行四边形对边、对角相等。

(3) 平行四边形性质证明的教学流程如下：

首先，通过问题（2）中的任一流程得出平行四边形的性质猜想：平行四边形对边、对角相等。

其次，口头提出任务“得出猜想后，能否用文字和符号语言将其证明出来？”并给予学生一定的时间，让其先不看书中证明步骤，利用之前所学知识进行自主证明。此时，教师走到学生中间，必要时予以点拨，比如添加辅助线，先证明两三角形全等等内容。

再次，请三个小组的代表到黑板上板书本组的证明过程，教师与其他小组一起分别点评之后，一起总结归纳出平行四边形关于边、角的性质定理——平行四边形的对边以及对角相等。再与学生一起对证明过程中所需要用到的转化思想（通过证明三角形全等来证明对边，对角相等）进行总结归纳。

最后，再让学生将自己的证明过程与书中过程进行比对，不够合理之处加以修正。