全国硕士研究生统一入学考试

全真模拟试题

[数学（二）]

考生注意事项

1． 考生必须严格遵守各项考场规则.

2． 答题前，考生应将答题卡上的“考生姓名”、“报考单位”、“考生编号”等信息填写清楚，并与准考证上的一致.

3． 答案必须按要求填涂或写在指定的答题卡上.

（1）客观题的答案填涂在答题卡（一）上，主观题的答案写在答题卡（二）上.

（2）填涂部分应该按照答题卡上的要求用 2B 铅笔完成.如要改动，必须用橡皮擦擦干净.书写部分必须用（黑）色字迹钢笔、圆珠笔、或签字笔在答题卡上作答.

4． 答题卡严禁折叠.考试结束后，将答题卡（一）和答题卡（二）一起放入原试卷袋中，试卷交给监考人员.

一、选择题：1-8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1） $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

（A）间断. （B）连续，但不可导. （C）可导，且 $f'(0)=0$. （D）可导，且 $f'(0)=1$.

（2）曲线 $y=(3x-4)e^{\frac{1}{x}}$

（A）没有渐近线. （B）仅有一条渐近线.

（C）恰有两条渐近线. （D）至少有三条渐近线.

（3）设函数 $f(x)$ 在区间（-1，1）内二次可导，已知 $f(0)=0, f'(0)=1$ 且， $f''(x)<0$ 当 $x\in(-1,1)$ 时成立，则

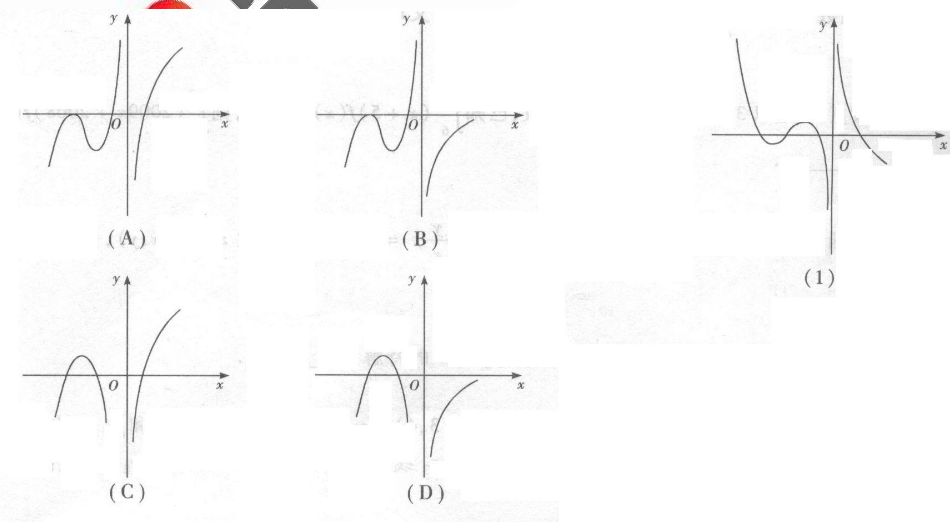
（A）当 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)>x$，而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)<x$.

（B）当 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)<x$，而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)>x$.

（C）当 $x\in(-1,0)$ 与 $x\in(0,1)$ 时都有 $f(x)>x$.

（D）当 $x\in(-1,0)$ 与 $x\in(0,1)$ 时都有 $f(x)<x$.

（4）设函数 $f(x)$ 在其定义域内可导，若 $y=f(x)$ 的图形如图（1）所示，则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形应为



（A） （B） （1） （C） （D）

（5）设 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=$

$(A)\ -\dfrac{1}{x}+C$ $(B)\ -\ln x+C$ $(C)\ \dfrac{1}{x}+C$ $(D)\ \ln x+C$

（6）若 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^n y^m d\sigma = 0$（ m,n 为正整数），则有（ ）

(A) m,n 为任意正整数　　(B) m,n 均为奇数

(C) m,n 中至少有一个为奇数　　(D) $m+n$ 为奇数

（7）设 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\0&1&1\\0&0&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，若矩阵 X 满足；$AX+2B=BA+2X$，则 $X^4=$

（A）$\begin{bmatrix}1&2&6\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$.　（B）$\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　（C）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　（D）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&1&1\end{bmatrix}$.

（8）已知向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关，则下列向量组中线性无关的是

（A）$a_1+a_2,a_2-a_3,a_3-a_4,a_4+a_1$.

（B）$a_1+a_2,a_1-2a_3,a_1+a_2-a_3,5a_2+a_3$.

（C）$a_1+a_2+a_3,a_1-a_2+a_3,a_1+3a_2+9a_3$.

（D）$a_1+a_3,a_2+2a_3+a_4,a_1+2a_3+a_4,a_2+3a_3+2a_4$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，则 $f(x)$ 的定义域是_______.

（10）设 $f(x)$ 是以 3 为周期的连续奇函数，已知 $\int_6^{12}(x+5)f(x)dx=2$，则 $\int_0^3(2016x+2017)f(x)dx=$_______.

（11）设函数 F 具有一阶连续偏导数，且 $F(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z})=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $xz'_x+yz'_y=$_______.

（12）微分方程 $y'=\left(1-y^2\right)\tan x, y\left(0\right)=2$ 的特解为 $y=$____________

（13）已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f^{(n)}(x)=$_____

（14）已知 $a_1=(1,3,5,-1)^T$，$a_2=(2,-1,-3,4)^T$，$a_3=(6,4,a+2,6)^T$ 和 $\beta_1=(7,7,8,1)^T$，

$\beta_2=(3,2,2,a+4)^T$，若 β_1 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示，而 β_2 可以由 a_1,a_2,a_3 线性表示，则 $a=$________.

三、解答题：15-23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

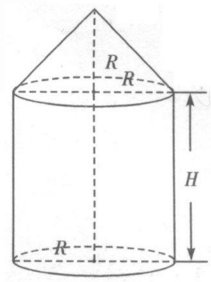
设 $f(x)=x^2-x+1$，t 是[1,3]上任意一点，$S_1(t)$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $y=f(1)$ 及 $x=t$ 围成的平面图形的面积；$S_2(t)$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $y=f(3)$ 及 $x=t$ 围成的平面图形的面积.

（Ⅰ）试证：存在唯一一点 t_0，使 $S_1(t_0)=S_2(t_0)$；

（Ⅱ）求 $S(t)=S_t(t)+S_2(t)$ 的最小值点.

（16）（本题满分 10 分）

如图，一个容积为 V（单位：立方米）的粮仓，它的顶部是高与底圆半径都是 R（单位：米）的圆锥形顶棚，底部是半径为 R 的圆形地基，侧面是高与底圆半径分别是 H（单位：米）与 R 的圆柱面形的围墙.若每平方米地基与每平方米围墙的造价是每平方米顶棚造价的两部，求使粮仓造价最便宜的 H 与 R.



（17）（本题满分 10 分）

过点 $(4,0)$ 作曲线 $y=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ 的切线.

(Ⅰ)求切线的方程;

(Ⅱ)求由这条切线与该曲线靠近切线一段及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

（18）((本题满分 10 分)

设 $f(t)$ 在[1,+∞]上有连续的二阶导数,且

$$f(1)=0,f'(1)=1,\quad z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$$

满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 求 $f(t)$ 的表达方式:

（19）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$.证明：

（Ⅰ）存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f'(\zeta)=f(\zeta)$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)-f(\eta)g'(\eta)=0$.

（20）（本题满分 11 分）

设区域 $D=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$，已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x\le 2,\\ 0, & x<-1\text{或}x>2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x)f(x^2-y)d\sigma$.

（21）（本题满分 11 分）

求证: $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$ (n 为大于 1 的自然数).

（22）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-6&1\\0&-1&0\\3&-6&0\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&-3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

试判断矩阵 A 和 B 是否相似，若相似求出可逆矩阵 P 和 $P^{-1}AP=B$，若不相似说明理由.

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f=x_1^2+(a+4)x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $by_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

（Ⅰ）求 a,b 的值及所用正交变换；（Ⅱ）若二次型 f 正定，求 a 的取值范围.