全国硕士研究生统一入学考试

全真模拟试题

[数学（三）]

考生注意事项

1. 考生必须严格遵守各项考场规则.
2. 答题前，考生应将答题卡上的“考生姓名”、“报考单位”、“考生编号”等信息填写清楚，并与准考证上的一致.
3. 答案必须按要求填涂或写在指定的答题卡上.

（1）客观题的答案填涂在答题卡（一）上，主观题的答案写在答题卡（二）上.

（2）填涂部分应该按照答题卡上的要求用 2B 铅笔完成.如要改动，必须用橡皮擦擦干净.书写部分必须用（黑）色字迹钢笔、圆珠笔、或签字笔在答题卡上作答.

4. 答题卡严禁折叠.考试结束后，将答题卡（一）和答题卡（二）一起放入原试卷袋中，试卷交给监考人员.

一、选择题：1-8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1） $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

（A）间断. （B）连续，但不可导. （C）可导，且 $f'(0)=0$. （D）可导，且 $f'(0)=1$.

（2）曲线 $y=(3x-4)e^{\frac{1}{x}}$

（A）没有渐近线. （B）仅有一条渐近线.

（C）恰有两条渐近线. （D）至少有三条渐近线.

（3）设函数 $f(x)$ 在区间（-1，1）内二次可导，已知 $f(0)=0, f'(0)=1$ 且， $f''(x)<0$ 当 $x\in(-1,1)$ 时成立，则

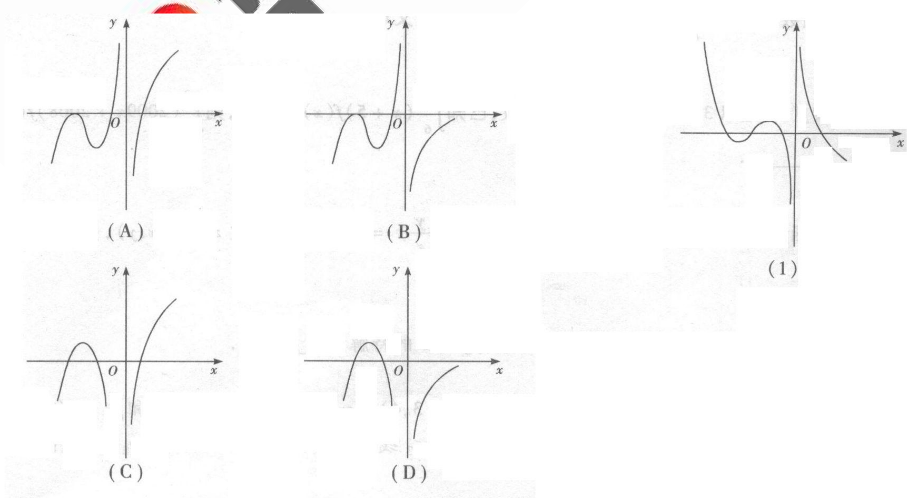
（A）当 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)>x$，而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)<x$.

（B）当 $x\in(-1,0)$ 时 $f(x)<x$，而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)>x$.

（C）当 $x\in(-1,0)$ 与 $x\in(0,1)$ 时都有 $f(x)>x$.

（D）当 $x\in(-1,0)$ 与 $x\in(0,1)$ 时都有 $f(x)<x$.

（4）设函数 $f(x)$ 在其定义域内可导，若 $y=f(x)$ 的图形如图（1）所示，则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形应为



（5）设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，若矩阵 X 满足：$AX+2B=BA+2X$，则 $X^4=$

（A）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.　　（B）$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　（C）$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　（D）$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\6 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

（6）已知向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关，则下列向量组中线性无关的是

（A）$a_1+a_2,a_2-a_3,a_3-a_4,a_4+a_1$.

（B）$a_1+a_2,a_1-2a_3,a_1+a_2-a_3,5a_2+a_3$.

（C）$a_1+a_2+a_3,a_1-a_2+a_3,a_1+3a_2+9a_3$.

（D）$a_1+a_3,a_2+2a_3+a_4,a_1+2a_3+a_4,a_2+3a_3+2a_4$.

（7）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，当 $n\to+\infty$ 时，Y_n 的极限服从正态分布，只要 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$

（A）服从同一离散型分布.　　（B）服从同一连续型分布.

（C）服从同参数的超几何分布.　　（D）服从自由度为 n 的 χ^2 的分布.

（8）设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是

（A）$f_1(x)f_2(x)$　　（B）$2f_2(x)F_1(x)$

（C）$f_1(x)F_1(x)+\dfrac{3}{2}f_2(x)F_2^2(x)$　　（D）$f_1^2(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，则 $f(x)$ 的定义域是______.

（10）设 $f(x)$ 是以 3 为周期的连续奇函数，已知 $\int_6^{12}(x+5)f(x)dx=2$，则 $\int_0^3(2016x+2017)f(x)dx=$______.

（11）设函数 F 具有一阶连续偏导数，且 $F(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z})=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $xz'_x+yz'_y=$______.

（12）差分方程 $2y_{t+1}-6y_t=5\cdot 3^t$ 满足 $y_0=0$ 的特解为______.

（13）已知 $a_1=(1,3,5,-1)^T$， $a_2=(2,-1,-3,4)^T$， $a_3=(6,4,a+2,6)^T$ 和 $\beta_1=(7,7,8,1)^T$，

$\beta_2=(3,2,2,a+4)^T$，若 β_1 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示，而 β_2 可以由 a_1,a_2,a_3 线性表示，则 $a=$________.

（14）在有 n 名运动员的运动队中，其各队队服随机编号分别为 $1,2,\cdots,n,$，则队员 A 与队员 B 的队服编号相差为 $m(0<m<n)$ 的概率是_______.

三、解答题：15-23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

设 $f(x)=x^2-x+1$，t 是[1,3]上任意一点，$S_1(t)$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $y=f(1)$ 及 $x=t$ 围成的平面图形的面积； $S_2(t)$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $y=f(3)$ 及 $x=t$ 围成的平面图形的面积.

（Ⅰ）试证：存在唯一点 t_0，使 $S_1(t_0)=S_2(t_0)$；

（Ⅱ）求 $S(t)=S_t(t)+S_2(t)$ 的最小值点.

（16）（本题满分 10 分）

某三轮车厂每生产一付车架要搭配三付轮胎；设轮胎的数量为 x，价格为 p_1，车架的数量为 y，价格为 p_2，又设需求函数 $x=63-0.25p_1$ 与 $y=60-\frac{1}{3}p_2$，成本函数为 $C(x,y)=x^2+xy+y^2+90$，求该厂获最大利润的产量与价格.

（17）（本题满分 10 分）

设区域 $D=|(x,y)|-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty|$，已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x\le 2,\\ 0, & x<-1或x>2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x)f(x^2-y)d\sigma$.

（18）（本题满分 10 分）

设 $u_n=\int_0^1 x^1(1-x)^n dx,(n=1,2,3\cdots)$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性，当此级数收敛时，试求其和.

（19）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$.证明：

（Ⅰ）存在$\zeta \in (a,b)$，使得$f'(\zeta)=f(\zeta)$；

（Ⅱ）存在$\eta \in (a,b)$，使得$f'(\eta)-f(\eta)g'(\eta)=0$.

（20）（本题满分 11 分）

已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$和$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

试判断矩阵A和B是否相似，若相似求出可逆矩阵P和$P^{-1}AP=B$，若不相似说明理由.

（21）（本题满分 11 分）

设二次型$f=x_1^2+(a+4)x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$经正交变换$x=Qy$化为标准形$by_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

（Ⅰ）求a,b的值及所用正交变换；（Ⅱ）若二次型f正定，求a的取值范围.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量X和Y独立，X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，Y服从参数为p的 0-1 分布.令$U=X+Y$，$V=X-Y$.试求：

（Ⅰ）(U,V)的联合概率分布；（Ⅱ）关于U和V的边缘概率分布.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

且$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的简单随机样本，求：

（Ⅰ）λ的最大似然估计量$\hat{\lambda}_1$；（Ⅱ）λ的矩估计量$\hat{\lambda}_2$.